# Topologie

## I EVN, espaces métriques:

### a- evn:

Données: $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ; E est un $\mathbb{K}$-ev

Déf: une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$

tq $(N_1)$: (Séparation) $\forall x \in E : N(x) = 0 \iff x = 0$

$(N_2)$ $\forall (\lambda, x) \in K \times E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

$(N_3)$ Sous additivité $\forall (x,y) \in E^2$ $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Voc: Une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant $(N_2)$ et $(N_3)$ est appelée une semi-norme.

On note aussi $N(x) = \|x\|$ $(E, \|\ \|)$ est appelé EVN

Props: 1) si $x \neq 0$, $N(x) > 0$ et $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = \frac{1}{N(x)} N(x) = 1$

$\frac{x}{N(x)}$ est unitaire.

2- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, $N(\lambda x) = 1 \iff |\lambda| = \frac{1}{N(x)}$

$\iff \lambda \in \left\{ -\frac{1}{N(x)}, \frac{1}{N(x)} \right\}$

$\mathbb{R}x$ possède deux vecteurs unitaires

3- $x \in E$, $N(x) = 1 \Rightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}$ $N(e^{i\theta} x) = 1$

c) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ $N\left(\sum_{1}^{n} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i)$

Ex : 1) $E = \mathbb{K}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x_k\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

(N3) pour $\| \ \|_2$ n'est autre que Minko.

$1 \leq p < \infty$ (HP) (HP) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$

1. Ex pers : $\|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$

2) Espace de fonctions :

$E = (\mathcal{C}([0,1]), \mathbb{C})$ $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

$$\|f_1\| = \int_a^b |f|$$

$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$ --- $\left[\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}\right]$

3) Espace de suites :

$\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid u_n \text{ est bornée}\}$

$$\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

$C_0(\mathbb{N}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid (u_n) \to 0\}$, muni de $\| \ \|_\infty$

$1 \leq p < +\infty$ $\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum |u_n|^p \text{ CV}\right\}$

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$$

Inclusions : $C_0 \subset \ell^\infty$ OK puis $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$

en effet Si $u \in \ell^1$, $(u_n) \to 0$ donc $|u_n| \leq 1$ apcr
donc $|u_n|^2 \leq |u_n|$ apcr et par suite $u \in \ell^2$

Géométrie:

Def : Une partie A de E est donc convexe lorsque:

$$\forall (x,y) \in A^2, \underbrace{\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0,1]\}}_{[x,y]} \subset A$$

Ex: $\emptyset$, tout SEA de E est convexe
affine = $a + F = \{a + x \mid x \in F\}$

Prop: $(E, \|\ \|)$ evn, $\overline{B}(0,1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$
est convexe

Soit $x, y \in \overline{B}(0,1)$, $\lambda \in [0,1]$ $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leq |\lambda| \|x\| + (1-\lambda)\|y\|$

$\leq \lambda + 1 - \lambda$

$= 1$

Ex: Soit $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant $N_1$ et $N_3$
Soit $A = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ Mq: A convexe $\Rightarrow$ N vérifie $(N_3)$

S/ Soit $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$ on veut $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

On a $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) \in A$

$N\left(\frac{y}{N(y)}\right) \in A$

$\lambda = \frac{N(x)}{N(x) + N(y)}$, $1 - \lambda = \frac{N(y)}{N(x) + N(y)}$

$\lambda x' + (1-\lambda) y' \in A$ $\left(= N\left(\frac{x+y}{N(x)+N(y)}\right)\right) \Rightarrow \frac{N(x+y)}{N(x)+N(y)} \leq 1$

**Ex:** Soit $(E, \|\ \|)$ evn, $x, y \in E \setminus \{0\}$ Mq
$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2} \max(\|x\|, \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

$$\|x+y\| \geq \frac{1}{2} \max(\|x\|, \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

**Ex:** La norme $\|\ \|$ sur $E$ est dite stricte lorsque $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow (x,y)$ lié

a- Normes parmi celles citées en 1), 2) lesquelles sont strictes

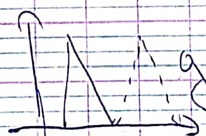
1) $(n \geq 2)$ $\|\ \|_\infty$ non $\|(1,0)+(1,1)\|_\infty = 2 \Rightarrow \|(1,0)\| + \|(1,1)\| = 2$

$\|\ \|_1$ non

$\|\ \|_2$ oui égalité C.S

2) $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$\|\ \|_\infty$ non : $\begin{cases} f(t) = t, & t \in [0,1] \\ g(t) = 1 \end{cases}$ $\quad \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, $\|f+g\|_\infty = 2$

$\|\ \|_1$ non  $\|f+g\| = \|f\|_1 + \|g\|_1$

$\|\ \|_2$ oui C.S

b) Soit $(x,y) \in E^2$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x+y\| = 2$

Mq $[x,y] \subset S(0,1) = \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$

Soit $\lambda \in [0,1]$.

$\underbrace{\|(1-\lambda)x+\lambda y\|}_{\leq 1} + \underbrace{\|\lambda x+(1-\lambda)y\|}_{\leq 2} \geq 2$

donc $\|(1-\lambda)x+\lambda y\| = \|(1-\lambda)y+\lambda x\| = 1$

3) $\|\ \|$ est stricte $\Leftrightarrow$ $S(0,1)$ ne contient pas de segment non trivial

(TD)

## B) Espaces métriques:

**Déf:** Soit $X$ un ensemble. On dit que $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur $X$ lorsque $d$ vérifie

$(D_1)$ (Séparation) $\forall (x,y) \in X^2$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(D_2)$ (Symétrie) $\forall (x,y) \in X^2$ $d(y,x) = d(x,y)$

$(D_3)$ (Inégalité triangulaire) $\forall (x,y,z) \in X^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

**Ex:** distance induite : $X \subset E$, et $\|\ \|$ est une norme sur $E$

On pose pour $(x,y) \in X^2$. $d(x,y) = \|x-y\|$

$(N_1) \Rightarrow D_1$

$(N_2)$ $(\lambda = -1) \Rightarrow D_2$

$(N_3) \Rightarrow D_3$ $\left| \begin{array}{l} u = x-y \\ v = y-z \end{array} \right.$

**Ex** $X = [0,2]^{\mathbb{N}}$ lorsque $(x,y) \in X^2$ on pose a

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

Prop : 1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$

$d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ (D.E.3)

2) I $\forall x, y, z \in X \quad |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(x,z)$

$(|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|)$ $y - d(x,y)$ Lipschitz

ADS 14h15 mercredi

D/ On a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$

$d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) = d(y,z)$

C) Boules ouvertes, fermés, sphères

Def : Soit $(a,r) \in X \times ]0, +\infty[$

Boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$

$B(a,r) = \{x \in X \,/\, d(x,a) < r\}$

— fermée — $\bar{B}(a,r) = \{x \in X \,/\, d(x,a) \leq r\}$

En Norm : $B(a,r) = \{x \in E \,|\, \|x - a\| < r\}$

$\bar{B}(a,r) = \{x \in E \,|\, \|x - a\| \leq r\}$

$S(a,r) = \{x \in X \,|\, d(x,a) = r\}$ on convient

$\bar{B}(a,0) = \{a\} = S(a,0)$

cas d'une partie de X : si $A \subset X$, on note $d_A$ la restriction de $d$ à $A^2$

On l'appelle distance induite ; si $a, r \in \mathbb{R}_+^*$

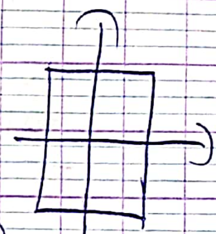
$$B_A(a,r) = \{x \in A \mid d_A(a,r) < x\} = B(a,r) \cap A$$

Ex : 1) $A = [0,1]$, $X = \mathbb{R}$, $B$

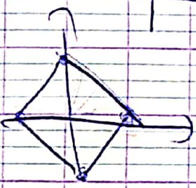
$$B(1, \tfrac{1}{2}) = ]1/2, 1]$$

2) $X = \mathbb{C}$ : $S^1$

**Dessins en evn** 1) $E = \mathbb{R}^2$ $\overline{B}_{\|\|_\infty}(0,1)$



$\overline{B}_{\|\|_1}(0,1)$



2) $E = \mathbb{R}^3$ $\overline{B}_{\|\|_\infty}(0,1) = [-1,1]^3$

$\overline{B}_{\|\|_1}(0,1) =$ octahèdre

**Prop** : (spécifique en evn) $B(a,r) = a + B(0,r)$
$\overline{B}(a,r) = a + \overline{B}(0,r)$

**en effet** : $\overline{B}(a,r) \{x \in E \mid \|x-a\| \leq r\}$ donc

$$x \in \overline{B}(a,r) \iff x - a \in \overline{B}(0,r)$$

$$\iff \exists u \in \overline{B}(0,r),\ x - a = u$$

$\Longleftrightarrow \exists u \in \overline{B}(0,r) \mid x = a+u$

<u>De même:</u> si $r>0$ $\overline{B}(0,r) = r\overline{B}(0,1)$

$r>0$ $B(0,r) = rB(0,1)$

## D) Bornitude :

<u>Th-Def</u> : Soit $A$ une partie de l'espace métrique $(X,d)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $\{d(x,y), (x,y) \in A^2\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^+$

2) Il existe une boule ouverte $B(a,r)$ de $X$ qui contient $A$.

3) Pour tout $a \in X$ il existe $r>0$ tq $A \subset B(a,r)$

On dit alors que $A$ est bornée, ~~diam(A)~~ :

$\text{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$

D/ ① ⇒ ③ : $R = \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$ ($<+\infty$ hyp)

soit $a \in X$ soit $x_0 \in A$, il vient $\forall x \in A$

$d(a,x) \leq d(a,x_0) + d(x_0,x)$

$< \underbrace{d(a,x_0) + \overset{R}{\cancel{d(x_0,x)}} + 1}_{r}$

donc $A \subset B(a,r)$

3) ⇒ 2) si $X \neq \emptyset$

2) ⇒ 1) si $A \subset \overline{B}(a,r)$ et $(x,y) \in A^2$ il vient

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2r$$

Exercice ① Soit $E$ un evn non nul.
Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$

Mq 1) $\mathrm{diam}(B(a,r)) = \mathrm{diam}(\overline{B}(a,r)) = 2r$
2) unicité du centre et du rayon d'une boule.

S/ 1) On sait déjà $\mathrm{diam}(\overline{B}(a,r)) \leq 2r$

$$\mathrm{diam}(B(a,r)) \leq 2r$$

Comme $E \neq \{0\}$ il existe $u \in E \setminus \{0\}$, $\|u\| =$

$$x = a + ru \in \overline{B}(a,r)$$

$$y = a - ru \in \overline{B}(a,r)$$

$$d(x,y) = \|y-x\| = 2r\|u\| = 2r$$

$n \geq 1$ : $x_n = a + \left(r - \frac{1}{n}\right)u$, $y_n = a - \left(r - \frac{1}{n}\right)u$

$$d(a,x_n) = \left(r - \frac{1}{n}\right)\|u\| = r - \frac{1}{n} < r$$

$$d(x_n,y_n) = 2\left(r - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 2r$$

Fonctions bornée :

$f : A \to X$ est bornée lorsque $f(A)$ est bornée.

Traduc. $\exists M \geq 0 \ \forall x \in A, \ \|f(x)\| \leq M$ $\quad (X, d) = (E, \|\cdot\|)$

Not : $B(A, X)$ désigne l'ens des fonctions bornées $A \to X$

$B(A, E)$ est un $\mathbb{K}$-ev, on le norme par $\|f\|_{A,\infty} = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$

Suite Bornée $(u_n)$ $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \|u_n\| \leq M$

E) Suites en e.m et evn

Convergence :

Def : $(X, d)$ espace métrique ; $(u_n) \in \mathbb{N}$

On dit que ~~la~~ $(u_n)$ CV lorsque $\exists \ell \in X \ (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ : ~~$\|u_n$~~ $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$

* Ceci équivaut à $\exists \ell \in X$, $d(u_n, \ell) \to 0$

Prop : Si $(u_n) \to \ell$ et $(u_n) \to \ell'$ alors $\ell = \ell'$

D/ Séparation : si $\ell \neq \ell'$ on pose $\varepsilon = \frac{1}{3} d(\ell, \ell')$

il existe $n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1$ $\quad d(u_n, \ell) < \varepsilon$

$n_2$ $\quad d(u_n, \ell') < \varepsilon$

ie $d(\ell,\ell') \leq d(\ell, u_n) + d(u_n, \ell') \leq 2\varepsilon < d(\ell,\ell')$

Absurde.

Opérations :

1) Comb linéaires (esc. pers)

2) si $\lambda_n \in \mathbb{K}^n$, $(\lambda_n) \to \lambda$, $u_n \in E^{\mathbb{N}}$, $(u_n) \to \ell$, $(\lambda_n u_n) \to \lambda \ell$

Algèbres normées :

$\mathbb{K}$-algèbre : $(A, +, \cdot, *)$, $*$ est bilinéaire de $A \times A$ ds $A$

calcul $(\lambda a + \mu b)(\lambda' a' + \mu' b') = \lambda\lambda' a * a' + \lambda\mu' a * b'$
$+ \mu\lambda' b * a' + \mu\mu' b b'$

Voc : Algèbre associative si $*$ l'est
unitaire si $*$ l'est admet un élém neutre

$*$ On dit qu'une norme $\|\ \|$ sur $A$ est une norme d'algèbre lorsque $\forall a, b \in A^2$, $\|a*b\| \leq \|a\| \|b\|$ $(*)$

Prop : $(A, \|\ \|)$ algèbre normée $[\|\ \|$ vérifie $(*)]$
si $a_n \to a$, $b_n \to b$ alors $a_n * b_n \to a * b$

D/ On écrit $a_n * b_n - a * b = (a_n - a) * b_n + a * (b_n - b)$
$\|\quad\| \leq \|a_n - a\| \|b_n\| + \|b_n - b\| \|a\|$

Or $b_n$ borné par $M > 0$

$\|\quad\| \leq \underbrace{M \|a_n - a\| + \|a\| \|b_n - b\|}_{\to 0}$

Ex Soit $a \in \mathcal{A}$ Mq $\|a^n\|^{1/n}$ CV

$$\|a^n\|^{1/n} \leq (\|a\|^n)^{1/n} = \|a\|$$

$$\|a^{n+m}\| \leq \|a^n\| \|a^m\|$$

si $v_n = \log \|a^n\|$

$$v_{n+m} \leq v_n + v_m$$

$$u_n = \frac{v_n}{n} \longrightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \quad \Big| \quad \|a^n\|^{1/n} \longrightarrow \rho(a) \in [0, \|a\|]$$

## E) Suites de fonctions

Convergence simple

Soient A un ensemble, E un evn, $f_n \in F(A, E)^{\mathbb{N}}$

Déf: on dit que la suite $(f_n)$ est simplement convergente lorsque $f_n(x)$ converge (suite à l'arrivée)

Voc: $f \begin{pmatrix} A \to E \\ x \mapsto \lim f_n(x) \end{pmatrix}$ est appelée limite simple

déf

Ex: $A = [0, 1]$, $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $f_n \xrightarrow{CVS} f$

si $x \in [0, 1[$ $f(x) = 0$, $f(1) = 1$

CVU:

On dit que $(f_n) \in F(A, E)^{\mathbb{N}}$ est uniformément convergente

Lorsqu'il existe $f \in F(A, E)^{\mathbb{N}}$ tq $f - f_n$ est bornée APCR

ii) $\|f - f_n\|_{A,\infty} \longrightarrow 0$ / $\sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \to 0$

On explicite : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$
$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

Il est clair que $f_n \xrightarrow{CVU} f$ entraine $f_n \xrightarrow{CVS} f$

⚠ Réciproque fausse | $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.
$f_n \xrightarrow{CVS} f = \mathbb{1}_1$

$\sup_{x \in [0,1[} x^n = 1$

Prop $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ si $(f_n) \xrightarrow{\|\|_\infty} f$ alors
$\|f_n - f\|_1 \to 0$ et $\|f_n - f\|_2 \to 0$

CV en moyenne — CV en moyenne quadratique